$\text{Lös}(A, \underline{b})$

$$:= \left\{ \underline{x} \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \begin{array}{c} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n = b_1 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots + a_{mn} x_n = b_m \end{array} \right\}$$

$$= \{ \underline{x} \in \mathbb{R}^n \mid A \cdot \underline{x} = \underline{b} \}$$

Gesucht: Darstellung der Form

$$\boxed{\text{Lös}(A, \underline{b}) = \underline{v} + \mathbb{R} \underline{w}_1 + \dots + \mathbb{R} \underline{w}_k}$$

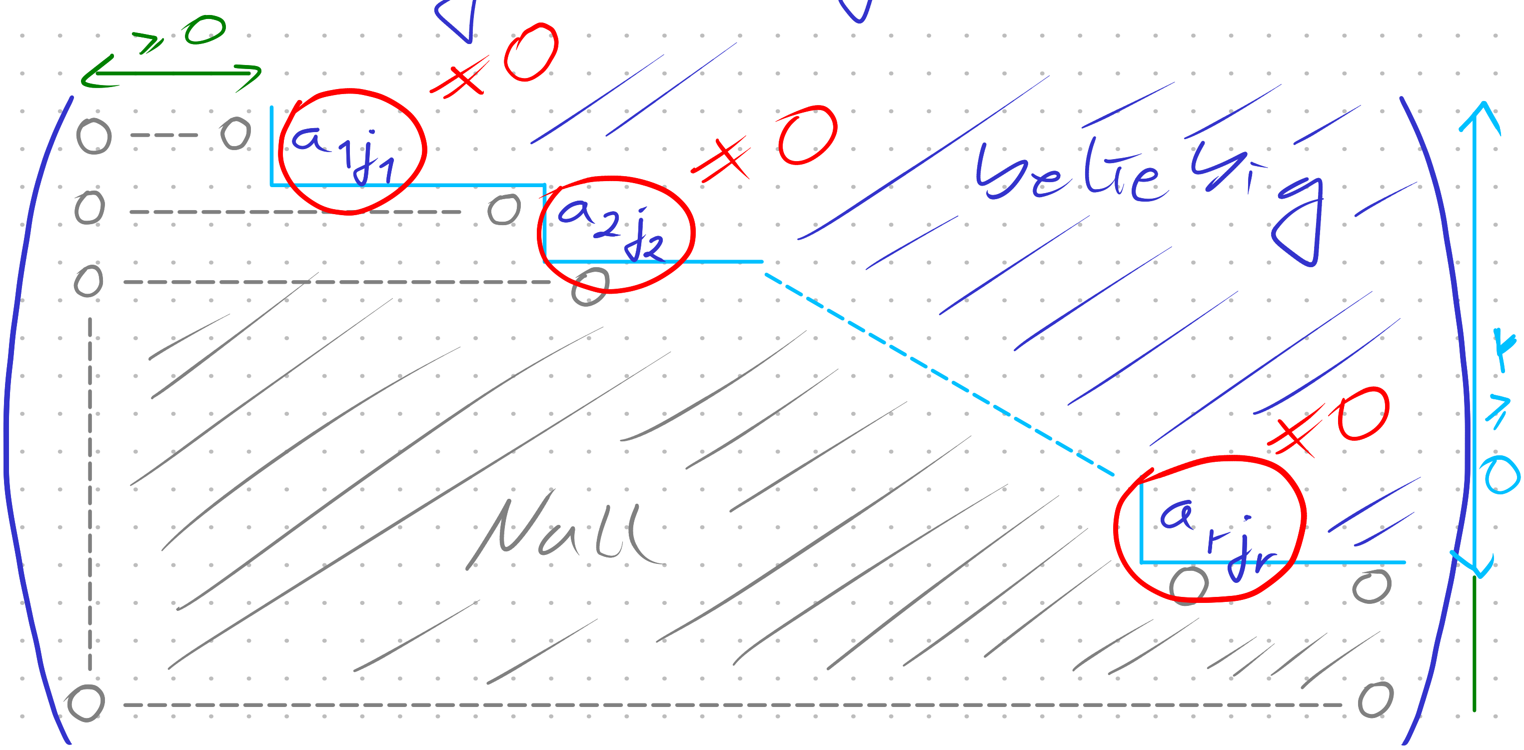
(mit minimalem k), $\underline{v}, \underline{w}_1, \dots, \underline{w}_k \in \mathbb{R}^n$

(Parametrisierung der Lösungsmenge)

1.4.3 Def.: Eine $m\times n$-Matrix

$A=(a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m\\ j=1,\dots,n}}$ ist in

Zeilenstufenform, wenn sie die folgende Gestalt hat:



Das heißt:

Es gibt ein r mit $0\leq r\leq m$ und Indizes $0\leq j_1<j_2<\dots<j_r\leq n$ sodass gilt:

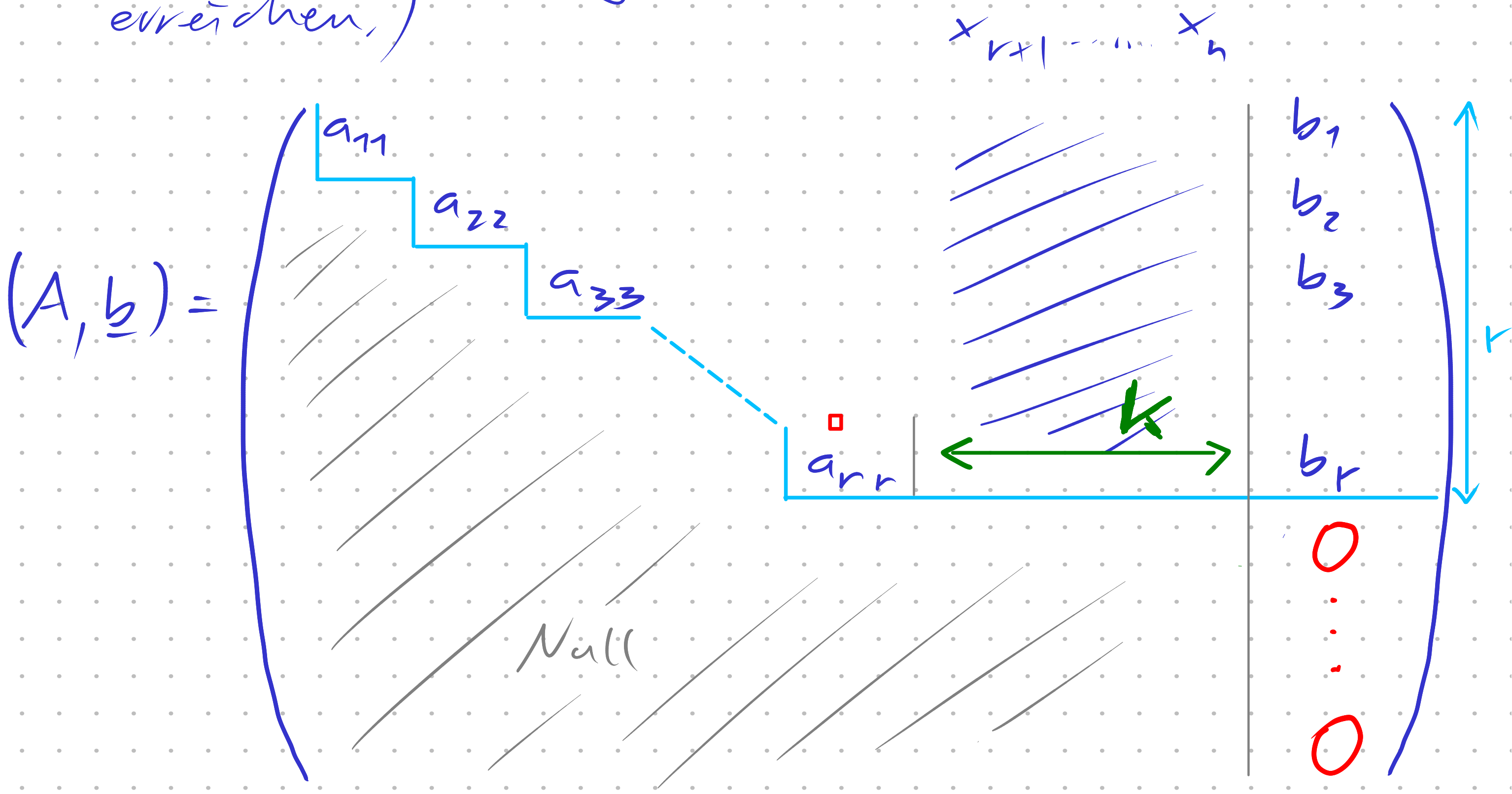
$$\begin{cases} a_{ij_i}\neq 0 & \text{für } 1\leq i\leq r \\ a_{ij}=0 & \text{falls } (i\leq r \text{ und } j<j_i) \end{cases}$$

$a_{ij} = 0$ falls $i > r$

Die Einträge $a_{ij_i} \neq 0$ $(1 \leq i \leq r)$ heißen **Pivots/Angelpunkte.**

Lösungsverfahren für A in Zeilenstufenform

Wir nehmen an
$j_1 = 1, j_2 = 2, \dots, j_r = r$.
(Das kann man durch Umnummerierung von $x_1, \dots, x_n$ erreichen.)



$k = n - r$

Notiz: Falls $b_i \neq 0$ für ein i mit $r+1 \leq i \leq m$, dann

$$\text{Lös}(A,b) = \emptyset$$

Nehme nun an, dass

$$b_{r+1} = b_{r+2} = \ldots = b_m = 0.$$

Für $x_{r+1}, \ldots, x_n$ können wir beliebige Werte („freie Parameter") wählen, sagen wir

$$x_{r+1} = \lambda_1 \in \mathbb{R}$$
$$x_{r+2} = \lambda_2 \in \mathbb{R}$$
$$\vdots$$
$$x_n = \lambda_k \in \mathbb{R}$$

(Zeile r) $\left(0 \ldots 0 \;\; \underbrace{a_{rr}}_{\neq 0} \; a_{r\,r+1} \ldots a_{rn} \,|\, b_r \right)$

$$a_{rr} \cdot x_r + a_{r\,r+1} x_{r+1} + \ldots + a_{rn} x_n = b_r,$$

also

$$a_{rr}x_r + a_{rr+1}\lambda_1 + \ldots + a_{rn}\lambda_k = b_r,$$

also

$$x_r = \underbrace{\frac{1}{a_{rr}}}_{=:c_{rr}} \cdot b_r + \underbrace{\left(\frac{-a_{rr+1}}{a_{rr}}\right)}_{=:d_{r1}} \cdot \lambda_1 + \ldots + \underbrace{\left(\frac{-a_{rn}}{a_{rr}}\right)}_{=:d_{rk}} \cdot \lambda_k$$

$$x_r = c_{rr} \cdot b_r + d_{r1}\lambda_1 + \ldots + d_{rk} \cdot \lambda_k$$

(wobei c_{ij}, d_{ij} nur von A abhängen)

(Zeile $r-1$) $\quad (0 \ldots 0 \; \overset{\neq 0}{a_{r-1r-1}} \ldots \mid b_{r-1})$

$$a_{r-1,r-1}x_{r-1} + a_{r-1,r}x_r + a_{r-1,r+1}x_{r+1} + \ldots + a_{r-1,n}x_n = b_{r-1}$$

$$a_{r-1,r-1}x_{r-1} + a_{r-1,r}(c_{rr} \cdot b_r + d_{r1}\lambda_1 + \ldots + d_{rk} \cdot \lambda_k) + a_{r-1,r+1}\lambda_1 + \ldots + a_{r-1,n}\lambda_n = b_{r-1}$$

Also:

$$x_{r-1} = \underbrace{\left(\frac{1}{a_{r-1,r-1}}\right)}_{c_{r-1,r-1}} \cdot b_{r-1} + \overbrace{\left(\frac{-a_{r-1,r} \cdot c_{rr}}{a_{r-1,r-1}}\right)}^{c_{r-1,r}} \cdot b_r$$

$$+ \underbrace{\left(\frac{-a_{r-1,r+1}}{a_{r-1,r-1}}\right)}_{d_{r-1,1}} \cdot \lambda_1 + \ldots + \underbrace{\left(\frac{-a_{r-1,n}}{a_{r-1,r-1}}\right)}_{d_{r-1,k}} \cdot \lambda_n$$

$$= c_{r-1,r-1} \cdot b_r + c_{r-1,r} \cdot b_r$$

$$+ d_{r-1,1} \lambda_1 + \ldots + d_{r-1,k} \lambda_k$$

wobei c_{ij}, d_{ij} nur von A abhängen

(Zeile 1):

$$x_1 = c_{11} b_1 + c_{12} b_2 + \ldots + c_{1r} b_r$$

$$+ d_{11} \lambda_1 + d_{12} \lambda_2 + \ldots + d_1 \lambda_k$$

Ergebnis:

(a) explizit

$$
\begin{array}{lllll}
x_1 = & c_{11} b_1 + c_{12} b_2 + \dots + c_{1r} b_r & + d_{11} \lambda_1 + & \dots & + d_{1k} \lambda_k \\
x_2 = & \phantom{c_{11} b_1 +{}} c_{22} b_2 + \dots + c_{2r} b_r & + d_{21} \lambda_1 + & \dots & + d_{2k} \lambda_k \\
\vdots & \qquad\qquad \ddots & & & \\
x_r = & \qquad\qquad\qquad c_{rr} b_r & + d_{r1} \lambda_1 + & & + d_{rk} \lambda_k \\
\hline
x_{r+1} = & & \lambda_1 & & \\
\vdots & & & \ddots & \\
x_n = & & & & \lambda_k
\end{array}
$$

(b) Matrixschreibweise:

$$
\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_r \\ \hline x_{r+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}
=
\underbrace{\begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1r} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & c_{rr} \\ \hline & & \\ & 0 & \end{pmatrix}}
\cdot
\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_r \end{pmatrix}
+
\underbrace{\begin{pmatrix} d_{11} & \cdots & d_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ d_{r1} & \cdots & d_{rk} \\ \hline 1 & & \\ & 1 & 0 \\ 0 & & \ddots \\ & & & 1 \end{pmatrix}}
\cdot
\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_k \end{pmatrix}
$$

$$
= \underbrace{C \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_r \end{pmatrix}}_{\underline{v}} + D \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_k \end{pmatrix}
$$

(c) "Parametrisierung"

$$\underline{x} = \underbrace{C \cdot \underline{b}}_{\underline{v}} + \lambda_1 \underbrace{\begin{pmatrix} d_{11} \\ \vdots \\ d_{r1} \\ \hline 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}_{\underline{w}_1} + \lambda_2 \underbrace{\begin{pmatrix} d_{12} \\ \vdots \\ d_{r2} \\ \hline 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}_{\underline{w}_2} + \dots + \lambda_k \underbrace{\begin{pmatrix} d_{1k} \\ \vdots \\ d_{rk} \\ \hline 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\underline{w}_k}$$

$$\text{Lös}(A, b) = \underline{v} + \mathbb{R}\underline{w}_1 + \dots + \mathbb{R} \cdot \underline{w}_k$$