

Lös(A, b)

$$:= \left\{ \underline{x} \in \mathbb{R}^n \mid \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{array} \right\}$$

$$= \left\{ \underline{x} \in \mathbb{R}^n \mid A \cdot \underline{x} = \underline{b} \right\}$$

Gesucht = Darstellung der Form

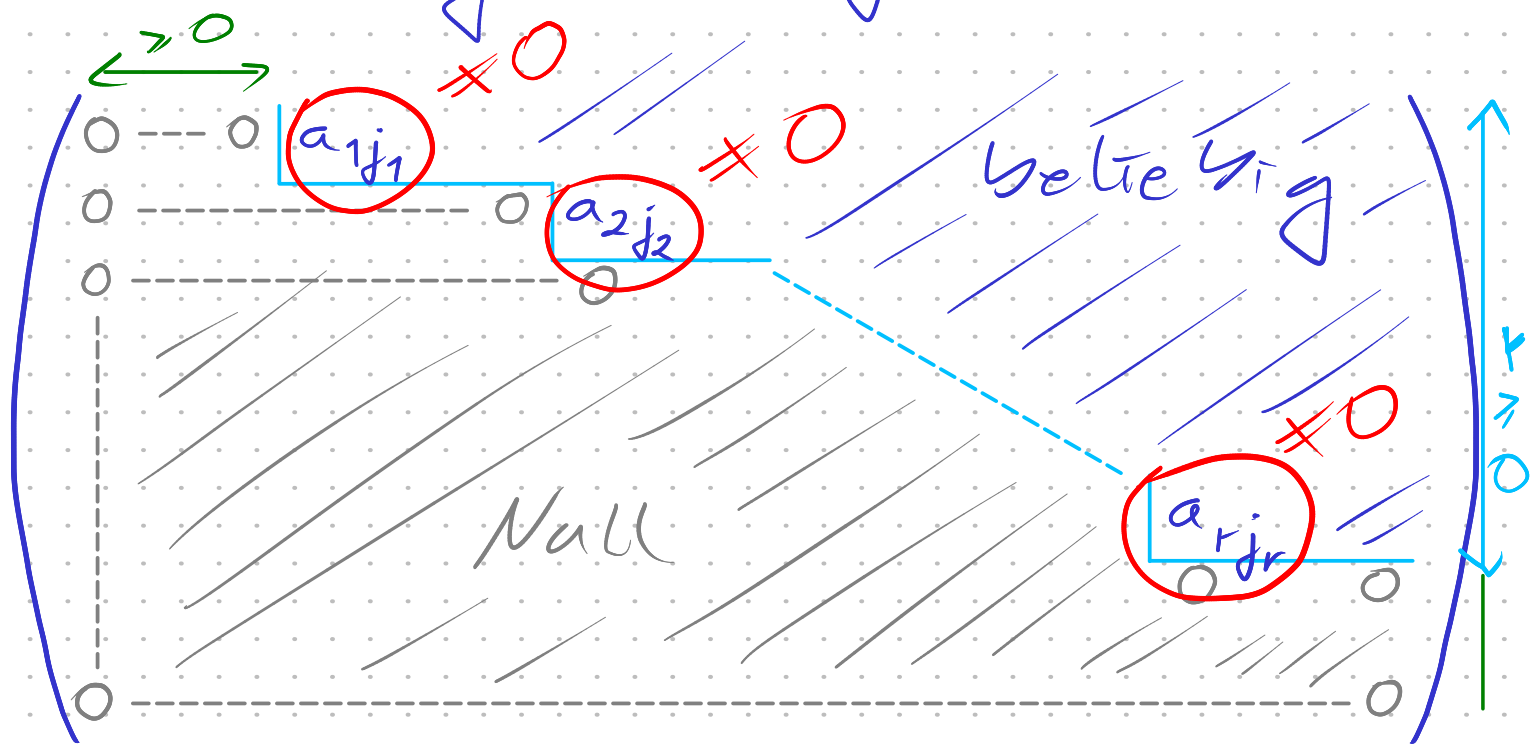
$$\text{Lös}(A, \underline{b}) = \underline{v} + \mathbb{R}\underline{w}_1 + \dots + \mathbb{R}\underline{w}_k$$

(mit minimalem k), $\underline{v}, \underline{w}_1, \dots, \underline{w}_k \in \mathbb{R}^n$
(Parametrisierung der Lösungsmenge)

1.4.3 Def.: Eine $m \times n$ -Matrix

$$A = (a_{ij})_{\substack{i=1, \dots, m \\ j=1, \dots, n}} \text{ ist in}$$

Zeilenstufenform, wenn sie die folgende Gestalt hat:



Das heißt:

Es gibt ein r mit $0 \leq r \leq m$
und Indizes $0 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_r \leq n$

sodass gilt:
$$\begin{cases} a_{ij_i} \neq 0 \text{ f\u00fcr } 1 \leq i \leq r \\ a_{ij} = 0 \text{ falls} \\ \quad (i \leq r \text{ und } j < j_i) \end{cases}$$

$$|a_{ij} = 0 \quad \text{falls } i > r$$

Die Einträge $a_{ij} \neq 0$ ($1 \leq i \leq r$)
heißen Pivots / Ankerpunkte.

Lösungsverfahren für A in Zeilenstufenform

Wir nehmen an

$$j_1=1, j_2=2, \dots, j_r=r.$$

(Das kann man durch

Umnummenerung von x_1, \dots, x_n
erreichen.)

$$(A, \underline{b}) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & & & & b_1 \\ & a_{22} & & & b_2 \\ & & a_{33} & & b_3 \\ & & & & \vdots \\ & & & & b_r \\ & & & & 0 \\ & & & & \vdots \\ & & & & 0 \end{array} \right)$$

Diagram description: The matrix is shown in row echelon form. The first r rows are non-zero, with pivots $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{rr}$ on the diagonal. The entries below the diagonal in these rows are shaded with diagonal lines. The bottom $n-r$ rows are shaded with diagonal lines and labeled "Null". A green double-headed arrow labeled k indicates the number of columns from the pivot a_{rr} to the right-hand side. The right-hand side vector \underline{b} has entries $b_1, b_2, b_3, \dots, b_r, 0, \dots, 0$. A blue double-headed arrow on the right indicates the total number of rows is n .

$$k = n - r$$

Notiz: Falls $b_i \neq 0$ für ein i
mit $r+1 \leq i \leq m$, dann
 $\text{Lös}(A, \underline{b}) = \emptyset$

Nehme nun an dass
 $b_{r+1} = b_{r+2} = \dots = b_m = 0.$

Für x_{r+1}, \dots, x_m können wir
beliebige Werte ("freie
Parameter") wählen, sagen
wir

$$x_{r+1} = \lambda_1 \in \mathbb{R}$$

$$x_{r+2} = \lambda_2 \in \mathbb{R}$$

\vdots

$$x_n = \lambda_k \in \mathbb{R}$$

(Zeile r) $(0 \dots 0 \quad \overset{\neq 0}{a_{rr}} \quad a_{rr+1} \dots a_{rn} \mid b_r)$

$$a_{rr} \cdot x_r + a_{rr+1} x_{r+1} + \dots + a_{rn} x_n = b_r,$$

also

$$a_{rv}x_r + a_{rv+1}x_{r+1} + \dots + a_{vn}x_n = b_r$$

also

$$x_r = \underbrace{\left(\frac{1}{a_{rv}}\right)}_{=: c_{rr}} \cdot b_r + \underbrace{\left(\frac{-a_{rv+1}}{a_{rv}}\right)}_{=: d_{r1}} \cdot x_{r+1} + \dots + \underbrace{\left(\frac{-a_{vn}}{a_{rv}}\right)}_{=: d_{rk}} \cdot x_n$$

$$x_r = c_{rr} \cdot b_r + d_{r1}x_{r+1} + \dots + d_{rk}x_n$$

(wobei c_{ij}, d_{ij} nur von A abhängen)

(Zeile $r-1$) $(0 \dots 0 \overset{x^0}{\underbrace{a_{r-1,r}}_{\neq 0}} \dots | b_{r-1})$

$$a_{r-1,r-1}x_{r-1} + a_{r-1,r}x_r$$

$$+ a_{r-1,r+1}x_{r+1} + \dots + a_{r-1,n}x_n = b_{r-1}$$

$$a_{r-1,r-1}x_{r-1} + a_{r-1,r}(c_{rr} \cdot b_r + d_{r1}x_{r+1} + \dots + d_{rk}x_n)$$

$$+ a_{r-1,r+1}x_{r+1} + \dots + a_{r-1,n}x_n = b_{r-1}$$

Also:

$$\begin{aligned}x_{r-1} &= \overset{c_{r-1,r-1}}{\left(\frac{1}{a_{r-1,r-1}}\right)} \cdot b_{r-1} + \overset{c_{r-1,r}}{\left(\frac{-a_{r-1,r} \cdot c_{r,r}}{a_{r-1,r-1}}\right)} \cdot b_r \\ &+ \left(\frac{-a_{r-1,r+1}}{a_{r-1,r-1}}\right) \cdot \underset{d_{r-1,1}}{\lambda_1} + \dots + \left(\frac{-a_{r-1,n}}{a_{r-1,r-1}}\right) \cdot \underset{d_{r-1,k}}{\lambda_n} \\ &= c_{r-1,r-1} \cdot b_{r-1} + c_{r-1,r} \cdot b_r \\ &+ d_{r-1,1} \lambda_1 + \dots + d_{r-1,k} \lambda_k\end{aligned}$$

wobei $c_{i,j}$, $d_{i,j}$ nur von A abhängen

(Zeile 1):

$$\begin{aligned}x_1 &= c_{11} b_1 + c_{12} b_2 + \dots + c_{1,r} b_r \\ &+ d_{11} \lambda_1 + d_{12} \lambda_2 + \dots + d_{1k} \lambda_k\end{aligned}$$

Ergebnis:

(a) explizit

$$\begin{array}{l}
 x_1 = c_{11} b_1 + c_{12} b_2 + \dots + c_{1r} b_r + d_{11} \lambda_1 + \dots + d_{1k} \lambda_k \\
 x_2 = \phantom{c_{11} b_1 +} c_{22} b_2 + \dots + c_{2r} b_r + d_{21} \lambda_1 + \dots + d_{2k} \lambda_k \\
 \vdots \\
 x_r = \phantom{c_{11} b_1 +} \phantom{c_{22} b_2 +} \dots + c_{rr} b_r + d_{r1} \lambda_1 + \dots + d_{rk} \lambda_k \\
 \hline
 x_{r+1} = \\
 \vdots \\
 x_n =
 \end{array}$$

(b) Matrixschreibweise:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_r \\ \hline x_{r+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & & c_{rr} \\ \hline 0 & & 0 \end{pmatrix}}_C \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_r \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} d_{11} & \dots & d_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{r1} & \dots & d_{rk} \\ \hline 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}}_D \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_k \end{pmatrix}$$

$$= \underbrace{C}_\downarrow \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_r \end{pmatrix} + D \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_k \end{pmatrix}$$

(c) "Parametrisierung"

$$\underline{x} = \underbrace{C}_{\underline{v}} \cdot \underline{b} + \lambda_1 \underbrace{\begin{pmatrix} d_{11} \\ \vdots \\ d_{r1} \\ \hline 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}_{\underline{w}_1} + \lambda_2 \underbrace{\begin{pmatrix} d_{12} \\ \vdots \\ d_{r2} \\ \hline 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}_{\underline{w}_2} + \dots + \lambda_k \underbrace{\begin{pmatrix} d_{1k} \\ \vdots \\ d_{rk} \\ \hline 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}}_{\underline{w}_k}$$

$$\text{Lös}(A, b) = \underline{v} + \mathbb{R} \underline{w}_1 + \dots + \mathbb{R} \cdot \underline{w}_k$$